

## 再分割アルゴリズムを用いた力学系の定常分布の数値計算

濡木 融<sup>†a)</sup> 村重 淳<sup>†b)</sup>

Numerical Computation of the Stationary Distribution for a Chaotic Discrete Dynamical System Using a Subdivision Algorithm

Yu NUREKI<sup>†a)</sup> and Sunao MURASHIGE<sup>†b)</sup>

あらまし 本研究では、カオス的な離散力学系の定常分布に対する有効な計算手法を提案する。定常分布は、力学系の定常状態において状態空間の各点に軌道が訪れる確率分布を表し、系の複雑な挙動を特徴づける。定常分布の計算方法として、状態空間を有限個の小領域に分割し、系の時間発展を有限マルコフ連鎖で近似し、定常分布を求める手法がある。しかし、この手法は系が比較的簡単な場合でも、分割数に応じて多くの計算量を要する。本論文では、定常分布の計算に適した非一様な分割の構成方法を示す。具体的には、はじめに極大な不変集合の定義に従い、定常分布の台となるアトラクタを含む領域の分割を求める。次に、分割した領域上の定常分布確率密度に応じて、空間解像度を考慮した分割を再構成する。再構成後の分割に対するマルコフ連鎖を用いて、定常分布を求めることができる。いくつかの計算例により、提案手法の有効性を確認した。

キーワード 力学系, マルコフ連鎖, 状態空間分割法, 定常分布

### 1. ま え が き

本研究では、連続写像  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  ( $d \geq 1$ ) で定義される離散力学系  $x^{(\nu+1)} = f(x^{(\nu)})$  ( $\nu = 0, 1, \dots$ ) を考える。系がカオス的であれば、軌道  $\{x^{(0)}, x^{(1)}, \dots\}$  は初期値  $x^{(0)}$  に大きく依存する。しかし、 $x^{(0)}$  をアトラクタ  $\Lambda$  の吸引領域内にとると、どの軌道も定常状態では  $\Lambda$  内に落ち着き、状態空間上に共通の分布を示す。定常分布はこのときの状態空間の各点への軌道の到達確率の確率分布を表し、系の挙動を特徴づける。例として、次式で表される Hénon 写像に対し、数値計算で求めたアトラクタ  $\Lambda$  と定常分布を図 1 に示す。

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 - 1.2x_1^2 + 0.2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

通常、定常分布は、定常状態の軌道を長時間追跡することにより求める。しかし、この方法には計算誤差の

蓄積や、観測時間が不十分であるなどの問題点がある。

これらの問題の解決法の一つとして、長時間の軌道を計算せずに状態空間の領域  $Q$  上のアトラクタ  $\Lambda$  を求める方法が Dellnitz らにより開発されてきた [1] ~ [3]。この方法は  $\Lambda$  を、有限個の方形の小領域  $S_i$  による状態空間の分割  $S = \{S_i\}_{i=1}^N$  を用いて、 $\cup_{i=1}^N S_i \supset \Lambda$  により近似する。例として、Hénon 写像 (1) の  $\Lambda$  の近似を図 1 に示す。以降、このような分割を繰り返す手法を状態空間分割法と呼ぶ。次に、Ulam の方法 [4] と呼ばれる手法で、分割  $S$  上の系の時間発展を有限マルコフ連鎖で近似し、その定常分布で系の定常分布を近似する。Ulam の方法による近似の収束は、Li [5] が拡大的な次元写像に対して証明し、Blank [6] により多次元の区分的に拡大的な写像に対して一般化され、これまでに様々な写像に対して証明が与えられている [3], [7] ~ [9]。

しかし、状態空間分割法、Ulam の方法はいずれも、比較的簡単な系でも分割数に応じて多くの計算量を要する。したがって、分割数を抑えつつ精度良く定常分布を近似するために、定常分布に応じた空間解像度をもつ分割  $S$  が望まれる。Dellnitz らは、定常分布の計算と分布確率の高い小領域の再分割とを反復することで、適当な空間解像度をもつ分割でアトラクタ  $\Lambda$  を

<sup>†</sup> 東京大学大学院新領域創成科学研究科複雑理工学専攻, 柏市 Department of Complexity Science and Engineering, Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo, 5-1-5 Kashiwanoha, Kashiwa-shi, 277-8561 Japan

a) E-mail: y-nureki@nds.k.u-tokyo.ac.jp

b) E-mail: s-murashige@nds.k.u-tokyo.ac.jp

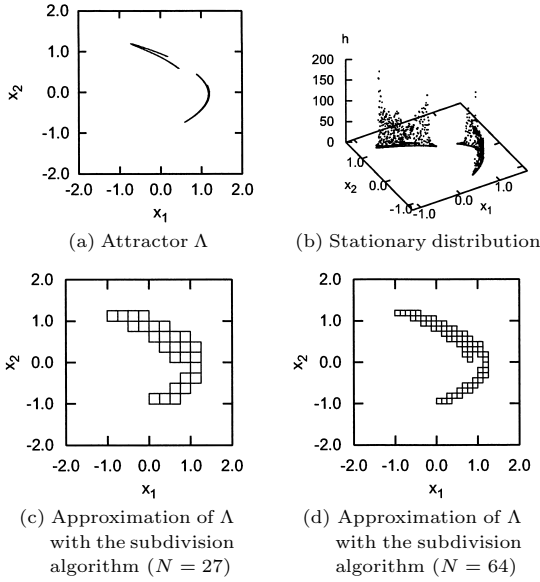


図 1 Hénon 写像 (1) のアトラクタ  $\Lambda$  と定常分布  $h$ : 定常分布の確率密度.  $N$ : 分割数  
 Fig. 1 The attractor  $\Lambda$  and the stationary distribution for the Hénon map (1).  $h$ : The stationary density.  $N$ : The number of states.

近似する方法を考案した [2], [10]. しかし, この方法は定常分布を繰り返し計算するため, 分割の計算コストが高い. また, 定常分布確率が低い箇所では  $\Lambda$  の近似精度が低いといった欠点がある.

本研究では,  $\Lambda$  を高精度に近似した分割から, 確率密度に応じて空間解像度を制御した分割を再構成する. この際,  $\Lambda$  の近似精度は保たれる. そして, 再構成後の分割に対するマルコフ連鎖を用いて定常分布を求める. また,  $\Lambda$  を効率良く近似するために,  $Q$  上の極大な不変集合を求める方法も考案した.

本論文では, 状態空間分割法とマルコフ連鎖を用いた定常分布の近似を 2. で, 極大な不変集合の計算法と分割の再構成法を 3. で説明する. 4. で提案手法の有効性を計算結果から示し, 考察を 5. で述べる.

## 2. 状態空間分割法を用いた力学系の定常分布の計算

### 2.1 状態空間分割法によるアトラクタの計算

状態空間分割法 [1] は, 力学系  $x^{(\nu+1)} = f(x^{(\nu)})$ , ( $\nu = 0, 1, \dots$ ) のアトラクタ  $\Lambda$  を, コンパクトな状態空間  $Q \subset \mathbb{R}^d$  における有限個の方形の小領域  $S_i$  による分割  $S = \{S_i\}_{i=1}^{N_S}$  により近似する手法である. 近似は以下のように 2 段階で行われる.

#### (i) 粗い近似 $B$

$Q$  上のすべての不変集合を含む領域を,  $N_B$  個の方形の小領域による分割  $B$  により近似

#### (ii) 高精度な近似 $S$

アトラクタ  $\Lambda$  の近似として,  $f$  による再帰性から分割  $B$  の一部  $S$  を抽出

$Q$  上のすべての不変集合は, 次式で与えられる極大な不変集合  $A$  に含まれる.

$$A = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} f^k(Q). \quad (2)$$

しかし, 一般に逆像  $f^{-1}(Q)$  は計算し難い. そのため, Dellnitz らは  $A_n^+$  (3) を (4) の反復により求め, 相対グローバルアトラクタ  $A_\infty^+ \supset A$  を近似している.

$$A_n^+ = \bigcap_{k=0}^n f^k(Q) \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (3)$$

$$A_{n+1}^+ = A_n^+ \cap f(A_n^+) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (4)$$

実際の計算では,  $A_n^+$  は  $N_B$  個の方形の小領域  $B_i$  による分割  $B_n = \{B_i\}_{i=1}^{N_B}$  で近似され, これが「粗い近似」として用いられる.

次に, 「粗い近似」 $B = \{B_i\}_{i=1}^{N_B}$  ( $= B_n$ ) 上で, 写像  $f$  による点の像を考え, 有向グラフを構成する. つまり, 各小領域  $B_i$  を頂点とし, 頂点  $B_i$  から頂点  $B_j$  への辺を設定する. この有向グラフを強連結成分分解し, 強連結成分に対応する小領域の集合  $S$  をアトラクタ  $\Lambda$  の「高精度な近似」として得る. 図 2 に Hénon 写像 (1) の  $\Lambda$  の近似の例を示す.  $A_\infty^+$  による「粗い近似」(図 2(a)) に比べ, その再帰的部分を抽出した「高精度な近似」(図 2(c)) は, 精度良く  $\Lambda$  を近似できていることが分かる.

### 2.2 マルコフ連鎖を用いた定常分布の計算

アトラクタ  $\Lambda$  を近似した分割を  $S = \{S_i\}_{i=1}^{N_S}$  と表す. このとき, 小領域  $S_i$  から  $S_j$  への推移確率  $p(S_i, S_j)$  は次式で与えられ, これは Frobenius-Perron 作用素の離散近似と考えられる [3], [5], [6].

$$p(S_i, S_j) = \frac{m(S_i \cap f^{-1}(S_j))}{m(S_i)}. \quad (5)$$

ここで,  $m(S_i)$  は小領域  $S_i$  の体積を表す.  $p(S_i, S_j)$  の計算方法は, 付録にまとめた. 次に, 時刻  $\nu$  ( $= 0, 1, \dots$ ) での分割  $S$  上の解の確率分布を, 小領域  $S_i$  における解の分布確率を  $i$  番目の成分にもつ確率ベ

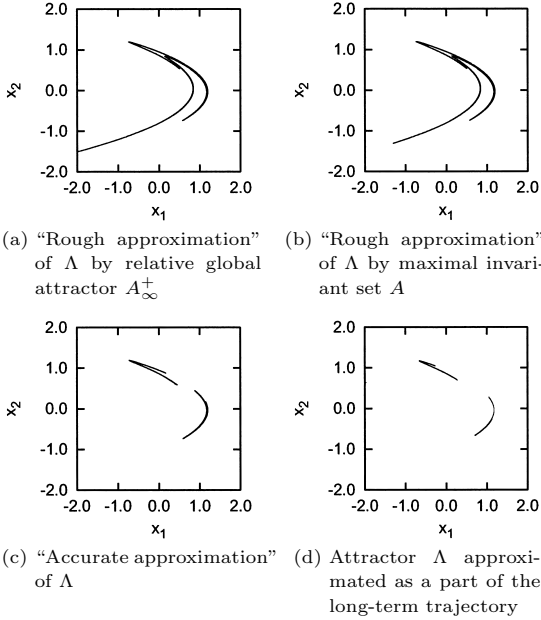


図 2 Hénon 写像 (1) のアトラクタ  $\Lambda$  の近似

Fig. 2 Approximation of the attractor  $\Lambda$  for the Hénon map (1) with the subdivision algorithm.

クトル  $u_S^{(\nu)} \in \mathbb{R}^N$  で表す. このとき, 確率分布  $u_S^{(\nu)}$  の時間変化は, 推移確率  $p(S_i, S_j)$  を  $ij$  成分にもつ  $N \times N$  の推移行列  $P_S$  を用いて,

$$u_S^{(\nu+1)} = u_S^{(\nu)} P_S \quad (\nu = 0, 1, \dots) \quad (6)$$

で与えられる有限マルコフ連鎖に従う.  $N$  が十分大きければ, 系の定常分布は (6) の不動点  $u_S^* (= u_S^* P_S)$  で近似できると考えられる.

### 3. 状態空間分割法の改良と分割の再構成

本研究では, 以下のようにして, 定常分布の計算に適した非一様な分割を構成する.

(i) アトラクタ  $\Lambda$  の近似

$\Lambda$  の「粗い近似」として極大な不変集合  $A$  (2) を求め,  $\Lambda$  の計算コストを減らす.

(ii) 分割の再構成

定常分布の確率密度を推定し, その結果に応じて空間解像度を制御した分割を再構成する.

状態空間  $Q$  上の  $A$  (2) を求めるには, 逆像  $f^{-1}(Q)$  を計算する必要がある. 3.1 で逆像の計算法を説明する. これを用いて 3.2 で極大な不変集合を計算し, 得られた分割を 3.3 の方法で再構成する.

#### 3.1 逆像の計算

状態空間  $Q$  に含まれる  $A$  の逆像  $f^{-1}(A) \cap Q$  の計算法を説明する.  $Q$  の方形小領域による分割を  $\mathcal{Q}$  とし, 各方形小領域  $S \in \mathcal{Q}$  を  $d$  次元区間とみなし,  $f$  の区間演算  $f_I$  を用いて  $Q$  を以下のように分類する.

(i)  $f$  による  $S \in \mathcal{Q}$  の像が  $A$  と交差しない

$$\mathcal{Q}^o(A) = \{S \in \mathcal{Q} \mid f_I(S) \cap A = \phi\}. \quad (7)$$

(ii)  $f$  による  $S \in \mathcal{Q}$  の像が  $A$  に含まれる

$$\mathcal{Q}^i(A) = \{S \in \mathcal{Q} \mid f_I(S) \subset A\}. \quad (8)$$

(iii) それ以外

$$\mathcal{Q}^b(A) = \mathcal{Q} \setminus (\mathcal{Q}^o \cup \mathcal{Q}^i). \quad (9)$$

このとき, 次のような包含関係が成り立つ.

$$\bigcup_{S \in \mathcal{Q}^i(A)} S \subset f^{-1}(A) \cap Q \subset \bigcup_{S \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}^o(A)} S. \quad (10)$$

$f^{-1}(A) \cap Q$  の近似精度は,  $\mathcal{Q}^b(A)$  内の小領域の再分割と  $\mathcal{Q}^o(A)$ ,  $\mathcal{Q}^i(A)$  への振分けの反復で上げられる.

#### 3.2 極大な不変集合を求める状態空間分割法

状態空間  $Q$  上の極大な不変集合  $A$  (2) の, 逆像に対応する部分  $A_n^-$  (11) は (12) の反復で求められる.

$$A_n^- = \bigcap_{k=0}^n f^{-k}(Q) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (11)$$

$$A_{n+1}^- = A_n^- \cap f^{-1}(A_n^-) \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (12)$$

また, (10) より, 次のような包含関係が成り立つ.

$$A_{n+1}^- \subset U_n^- \cap f^{-1}(U_n^-) \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}_n \setminus \mathcal{B}_n^o} B. \quad (13)$$

ここで,

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}_n} B = U_n^- \supset A_n^-, \quad (14)$$

$$\mathcal{B}_n^o = \{B \in \mathcal{B}_n \mid f_I(B) \cap U_n^- = \phi\}. \quad (15)$$

そこで, 反復 (4), (12) を合わせた反復

$$A_{n+1} = A_n \cap f(A_n) \cap f^{-1}(A_n) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (16)$$

を考え,  $A_n$  を覆う分割  $\mathcal{B}_n$  により極大な不変集合  $A$  を近似する. 分割  $\mathcal{B}_{n+1}$  は分割  $\mathcal{B}_n$  から以下のようにして二段階で得られる. ただし,  $\mathcal{B}_0 = \{Q\}$ .

(i) 再分割 ( $B_n \rightarrow \hat{B}_{n+1}$ )

分割  $B_n$  内の小領域をより細かい小領域に分割し、次式を満たす分割  $\hat{B}_{n+1}$  を構成する。

$$\bigcup_{B \in \hat{B}_{n+1}} B = \bigcup_{B \in B_n} B = U_n. \quad (17)$$

(ii) 選択 ( $\hat{B}_{n+1} \rightarrow B_{n+1}$ )

$A_{n+1} \subset U_n \cap f(U_n) \cap f^{-1}(U_n) \subset U_{n+1}$  となるように、次式により分割  $B_{n+1}$  を構成する。

$$B_{n+1} = \{B \in \hat{B}_{n+1} \mid B \cap f(U_n) \cap f^{-1}(U_n) \neq \emptyset\}. \quad (18)$$

(18) の条件式は以下の関係を用いて計算する。

$$\begin{aligned} B \cap f(U_n) \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow \exists \hat{B} \in \hat{B}_{n+1}, f(\hat{B}) \cap B \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} B \cap f^{-1}(U_n) \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow \exists \hat{B} \in \hat{B}_{n+1}, \hat{B} \cap f(B) \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (20)$$

図 3 に Hénon 写像 (1) の極大な不変集合  $A$  (2) の近似の例を示す。

### 3.3 マルコフ連鎖の分割の再構成

アトラクタ  $\Lambda$  を近似した分割を  $S = \{S_i\}_{i=1}^N$  と表す。マルコフ連鎖の定常分布確率  $u_{S,i}$  をもつ小領域  $S_i$  に対し、 $x \in S_i$  での確率密度  $h(x)$  は、次式で表される  $S_i$  上で一様な確率密度  $h_{S,i}$  で近似される。

$$\begin{aligned} h(x) &\sim \frac{\int_{S_i} h(x) m(dx)}{m(S_i)} \\ &\sim \frac{u_{S,i}}{m(S_i)} = h_{S,i} \text{ for } x \in S_i. \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $m$  は体積を表す。次に、次の条件 (C1) の下で、各小領域  $S_i$  を隣接する小領域と結合し、 $\Lambda$  の近似精度を保ったまま分割数を減らすことを考える。

(C1) 定常分布確率密度  $h_{S,i}$  が高いと推定された小領域  $S_i$  は結合しない。

#### 3.3.1 定常分布の確率密度の推定

アトラクタ  $\Lambda$  を近似した分割を  $S = \{S_i\}_{i=1}^N$ 、推移行列を  $P_S$  と表す。本研究では、以下の二通りの小領域内で確率密度  $h$  が高くなると推定する。

(i) 周期点近傍

$\tau$  周期点近傍の小領域  $S_i$  では、 $f^\tau(S_i) \cap S_i \neq \emptyset$  であり、 $S_i$  上には時間間隔  $\tau$  でとどまる点がある。こ

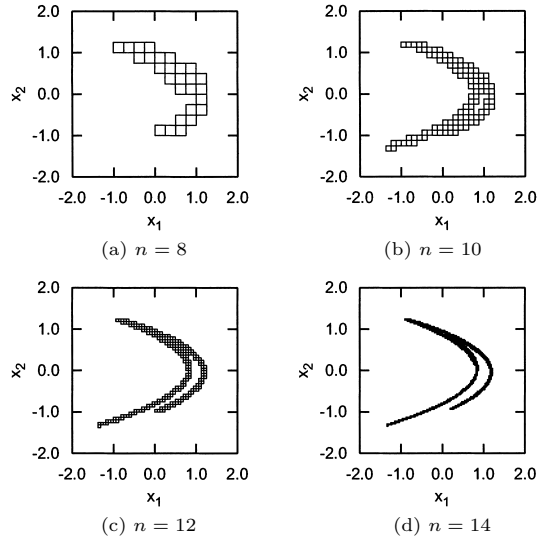


図 3 Hénon 写像 (1) の極大な不変集合  $A$  (2) の計算、 $n$  : 再分割の反復数

Fig. 3 Approximation of the maximal invariant set  $A$  for the Hénon map (1).  $n$ : The number of subdivision steps.

ことから、次式により選択される低周期  $\tau = 1, 2$  の周期点近傍の小領域  $S_i$  では定常分布が高いと期待される。

$$S_i \text{ s.t. } \exists j, P_{S,i,j} > 0 \text{ and } P_{S,j,i} > 0. \quad (22)$$

(ii) 定常分布確率密度の比  $\eta$  がしきい値  $\eta^*$  以上定常分布確率密度の高い点は、その逆像に比べて十分に高い確率密度をもつと期待される。本研究では、次式で表される確率密度比の近似  $\eta$  が、与えたいしきい値  $\eta^* (\geq 1)$  以上であれば、「十分に高い」確率密度をもつと考える。

$$\begin{aligned} \eta(S_j) &= \frac{\bar{h}(S_j)}{\bar{h}(f^{-1}(S_j) \cap U)} = \frac{m(f^{-1}(S_j) \cap U)}{m(S_j)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N P_{S,i,j} m(S_i)}{m(S_j)}. \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{i=1}^N S_i, \\ \bar{h}(S) &= \frac{\int_S h(x) m(dx)}{m(S)} = \frac{\mu(S)}{m(S)}, \end{aligned} \quad (24)$$

$\mu$  は力学系の (分割上で離散化されてない) 定常分布確率を、 $m$  は体積を表している。式 (23) の二つ目の

表 1 アトラクタ  $\Lambda$  の「粗い近似」に、相対グローバルアトラクタ  $A^+ (= A_\infty^+)$  を用いた場合と、極大な不変集合  $A$  を用いた場合の比較。(a): 一次元ロジスティック写像。(b): Hénon 写像。(c): 三次元ロジスティック写像。(d): Duffing 方程式のポアンカレ写像。(e): Rössler 方程式のポアンカレ写像。 $N_S$ : 「高精度な近似」の分割数。 $N_B$ : 「粗い近似」の分割数。 $t$ : 「高精度な近似」を得るまでの計算時間

Table 1 Comparison of “rough approximation” of attractor  $\Lambda$ , relative global attractor  $A^+ (= A_\infty^+)$  (3) and maximal invariant set  $A$  (2). (a): 1 dimensional logistic map. (b): The Hénon map. (c): 3 dimensional logistic map. (d): The Poincaré map of the Duffing equation. (e): The Poincaré map of the Rössler equation.  $N_S$ : The number of states for “accurate approximation”.  $N_B$ : The number of states for “rough approximation”.  $t$ : The time for calculation of the “accurate approximation.”

	(a)		(b)		(c)		(d)		(e)	
$N_S$	2048		1383		2118		1459		1918	
Type of “rough approximation”	$A^+$	$A$	$A^+$	$A$	$A^+$	$A$	$A^+$	$A$	$A^+$	$A$
$N_B$	2048	2048	3735	3347	2548	2197	1459	1459	2692	2692
$t$ [s]	5.1	5.1	20.8	20.5	51.3	44.5	2151.0	2090.7	6849.7	6830.9

等号は、アトラクタ  $\Lambda$  が定常分布  $\mu$  の台であるという仮定と関係式  $\Lambda \subset U$  から導かれる、次の関係式により成立している。

$$\mu(S_j) = \mu(f^{-1}(S_j)) = \mu(f^{-1}(S_j) \cap U) \quad (25)$$

### 3.3.2 再構成のアルゴリズム

アトラクタ  $\Lambda$  を近似した分割を  $S_0$  と表す。 $S_n$  ( $n = 0, 1, \dots$  は再構成の反復数) に対し、各小領域  $S \in S_n$  を隣接小領域  $\hat{S} \in S_n$  と結合 ( $S \cup \hat{S}$ ) し、新たに分割  $S_{n+1}$  とする。ただし、一回の再構成において、各小領域  $S$  が結合されるのは一度だけとする。

以下に再構成のアルゴリズムを示す。まず、定常分布確率密度の推定を行い、高い確率密度をもつと推定された  $S_n$  内の小領域をすべて  $S_{n+1}$  の元とする。これらの小領域は以後、結合済とみなす。次に、以下の (i)-(iii) に従って再構成を進める。

(i) 未結合な小領域の選択 ( $S_n \rightarrow \mathcal{V}$ )

$S_n$  から未結合な小領域を集め、集合  $\mathcal{V}$  を構成する。 $\mathcal{V} = \phi$  ならば分割の再構成を終える。

(ii) 隣接小領域の選択 ( $\mathcal{V} \rightarrow \hat{S}$ )

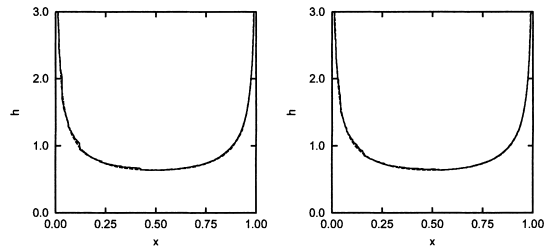
$S \in \mathcal{V}$  ( $\eta(S) = \min_{S' \in \mathcal{V}} \eta(S')$ ) に隣接する、 $\mathcal{V}$  内の小領域を集め、 $\mathcal{E}$  とする。 $\mathcal{E} = \phi$  ならば、 $S$  を  $S_{n+1}$  の元とし、(i) へ戻る (以後、 $S$  は結合済とみなす)。 $\mathcal{E} \neq \phi$  ならば、 $\hat{S} \in \mathcal{E}$  ( $\eta(\hat{S}) = \min_{S' \in \mathcal{E}} \eta(S')$ ) を選択する。

(iii)  $S$  と  $\hat{S}$  の結合

結合  $S \cup \hat{S}$  を  $S_{n+1}$  の元とし、(i) へ戻る。

## 4. 計算結果

定常分布の計算結果を示す。定常分布確率密度の推



(a)  $(n, N) = (0, 2048)$  (b)  $(n, N) = (2, 614)$

図 4 一次元ロジスティック写像 (26) の定常分布。実線：計算値。破線：理論値。 $h$ : 定常分布の確率密度。 $n$ : 分割の再構成の反復数。 $N$ : 分割数

Fig. 4 Approximation of stationary distribution for 1 dimensional logistic map (26). Approximated (theoretical) distribution is shown as the solid (dotted) line.  $h$ : Stationary density.  $n$ : The number of steps for reconstruction of the partition.  $N$ : The number of states.

定では、すべてしきい値  $\eta^* = 2$  とした。

### 4.1 計算例：一次元ロジスティック写像

次式で与えられる一次元ロジスティック写像  $f$ :  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  について定常分布を計算した。

$$f(x) = 4x(1-x). \quad (26)$$

一次元ロジスティック写像 (26) は、 $\Lambda = [0, 1]$  上で確率密度が次式で表される定常分布をもつ。

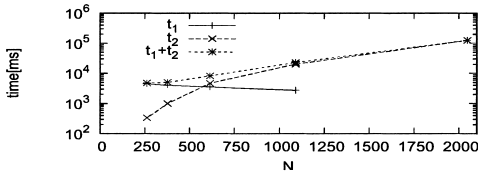
$$h^*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}. \quad (27)$$

状態空間  $Q = [0, 1]$  に対し、相対グローバルアトラクタ  $A_\infty^+$  (3)、極大な不変集合  $A$  (2) は  $\Lambda = [0, 1]$  に一致し、 $\Lambda$  の近似に差はなかった (表 1)。定常分布は、分割の再構成で分割数を元の 30%程度にまで減らしても、理論値  $h^*$  と一致した結果が得られた (図 4)。再

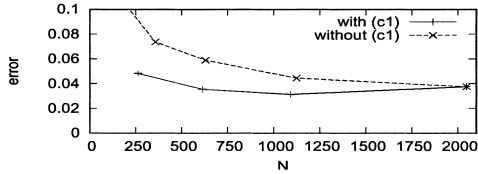
表 2 定常分布の精度と計算時間に関する、分割の再構成の有無による比較。(a), (b), (c), (d), (e): 表 1 を参照。「Reconstruction」では、分割の再構成の有無を表す。「T」(「F」)は再構成された(されてない)分割であることを意味する。「Accuracy」では、(a) では  $L_1$  誤差, (b), (c), (d), (e) では標準偏差  $\sigma$  (28) を記した。 $t_1$ : 分割の再構成に要した時間。 $t_2$ : マルコフ連鎖の定常分布の計算時間

Table 2 Comparison of the results with the Markov chains on reconstructed partition and base partition in regard to accuracy of approximation of stationary distribution and the time for the calculation. (a), (b), (c), (d), (e): See Table 1. In the item “Reconstruction”, “T” (“F”) means whether the Markov chain is on reconstructed partition (“T”) or base partition (“F”). The item “Accuracy” shows error in (a) and standard deviation  $\sigma$  (28) in others.  $t_1$ : The time for reconstruction of partition.  $t_2$ : The time to calculate stationary distribution of the Markov chain.

	(a)		(b)		(c)		(d)		(e)	
Reconstruction	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T
Number of states $N$	2048	614	1383	822	2118	1230	1459	847	1918	1061
Accuracy	0.0376	0.0354	27.0	26.3	3.04	2.97	0.0327	0.0329	7.734	7.593
$t_1$ [s]	0	3.5	0	1.4	0	3.9	0	3.3	0	4.0
$t_2$ [s]	124.1	4.7	67.7	24.4	325.7	94.2	186.8	39.8	217.9	48.0
$t_1 + t_2$ [s]	124.1	8.2	67.7	25.8	325.7	98.3	186.8	43.1	217.9	52.1



(a) Time for calculation of stationary distribution



(b) Error of the approximated stationary distribution

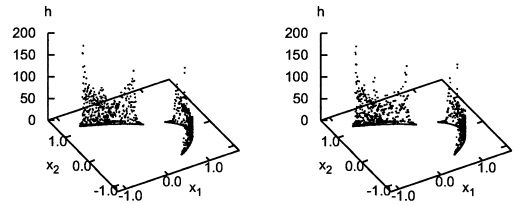
図 5 一次元ロジスティック写像 (26) の定常分布の計算時間と誤差。(b) で、実(破)線は、条件(C1)有(無)で分割を再構成した場合を表す。 $t_1, t_2$ : 表 2 を参照。 $N$ : 分割数

Fig. 5 The time for calculation of stationary distribution and error of the approximated distribution for 1 dimensional logistic map (26). In (b), the solid (dotted) line shows the case partition is reconstructed with (without) condition (C1).  $t_1, t_2$ : See Table 2.  $N$ : The number of states.

構成は短時間で(元の 2048 分割上のマルコフ連鎖の定常分布の計算時間の 5%以下), 定常分布の計算時間を短縮できた(図 5(a), 表 2)。また, 図 5(b) から, 条件(C1)により誤差  $|h^* - h_S|_{L_1}$  の増大が抑えられていることが分かった。

#### 4.2 計算例: Hénon 写像

Hénon 写像 (1) の定常分布を計算した。アトラクタの計算時間はほとんど短縮できなかった(表 1)。また, 図 6 に示した定常分布の計算結果から, 再構成後の分割でも定常分布のピークがとらえられていることが分かる。精度の保持を定常分布確率密度の標準偏



(a)  $(n, N) = (0, 1383)$  (b)  $(n, N) = (1, 822)$

図 6 Hénon 写像 (1) の定常分布。 $h, n, N$ : 図 4 を参照  
Fig. 6 Approximation of stationary distribution for the Hénon map (1).  $h, n, N$ : See Fig. 4.

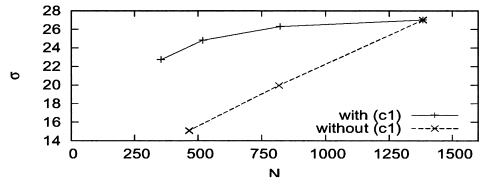


図 7 Hénon 写像 (1) の定常分布確率密度の標準偏差  $\sigma$  (28)。実(破)線: 条件(C1)有(無)で分割を再構成した場合。 $N$ : 分割数

Fig. 7 Standard deviation  $\sigma$  (28) of stationary density for the Hénon map (1). The solid (dotted) line shows the case partition is reconstructed with (without) condition (C1).  $N$ : The number of states.

差によって確認した。分割  $S$  上で近似した, 各小領域  $S_i$  内で一様な定常分布確率密度を  $h_{S,i}$  (21) で表すと, その標準偏差  $\sigma$  は次式から計算できる。

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( h_{S,i} - \frac{1}{m(U)} \right)^2 \frac{m(S_i)}{m(U)}}. \quad (28)$$

ここで,  $U = \cup_{i=1}^N S_i$ 。精度をほぼ保持しつつ計算時間を半分以下に減らすことができた(図 7, 表 2)。

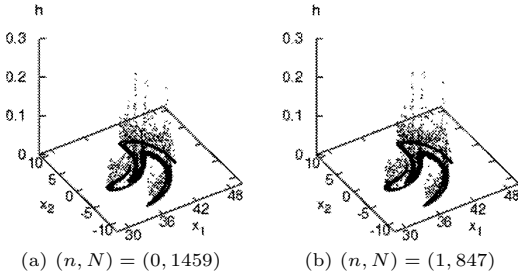


図 8 Duffing 方程式 (30) のポアンカレ写像の定常分布．  
 $h, n, N$ : 図 4 を参照  
 Fig. 8 Approximation of stationary distribution for the Poincaré map of the Duffing equation (30).  $h, n, N$ : See Fig. 4.

### 4.3 計算例：三次元ロジスティック写像

三次元ロジスティック写像は次式で与えられる．

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - 1.2x_1 \\ 2.35x_2(1 - x_1) \\ x_1 - 0.1x_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

この例では、アトラクタの計算時間を約 13%短縮できた (表 1)．また、定常分布の精度を保持したまま計算時間を約 70%短縮できた (表 2)．

### 4.4 計算例：Duffing 方程式のポアンカレ写像

非自律系の微分方程式の例として、次式で与えられる Duffing 方程式を考え、断面  $x_3 \bmod (2\pi) = 0$  におけるポアンカレ写像の定常分布を計算した．

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x_2 \\ -0.2x_2 - \frac{x_1}{9} - \left(\frac{x_1}{9}\right)^3 + 27 \cos x_3 \\ 1.33 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

この例では、推移確率  $p(S_i, S_j)$  は、 $S_i$  内で格子状に選んだ 100 点の像を追跡することにより求めた．このため、他の例に比べ、アトラクタ  $\Lambda$  の近似に極端に時間を要した (表 1)． $A, A_\infty^+$  それぞれによる「粗い近似」は等しく、計算時間の差は無視できるものとみなせる．分割の再構成の有効性は、他の例と同様に、図 8、表 2 から確認された．また、他のポアンカレ断面においても同様の結果が得られた．

### 4.5 計算例：Rössler 方程式のポアンカレ写像

自律系の微分方程式の例として、次式で与えられる Rössler 方程式を考え、断面  $x_1 = x_1^*, x_1 > 0$  におけるポアンカレ写像の定常分布を計算した．ここで、

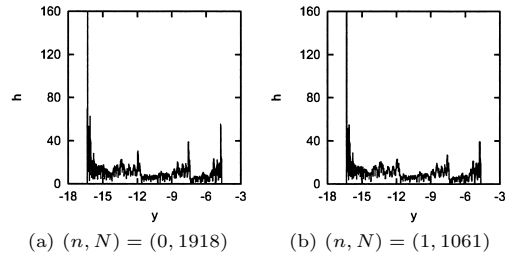


図 9 Rössler 方程式 (31) のポアンカレ写像の定常分布．  
 $h, n, N$ : 図 4 を参照  
 Fig. 9 Approximation of stationary distribution for the Poincaré map of the Rössler Eq. (31).  $h, n, N$ : See Fig. 4.

$x_1^* = 9.003 \times 10^{-4}$  は不動点の  $x_1$  座標を表す．

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_1 + 0.15x_2 \\ 0.2 + x_3(x_1 - 10) \end{pmatrix}. \quad (31)$$

推移確率  $p(S_i, S_j)$  は、4.4 と同様に求めた．他の例と同様に、得られた定常分布 (図 9) に対し、その精度が再構成後の分割でも保持されていることを標準偏差  $\sigma$  (28) によって確認した．また、他のポアンカレ断面においても同様の結果が得られた．

## 5. 考 察

### 5.1 極大な不変集合の計算に関して

観測する状態空間  $Q$  が大きいほど極大な不変集合  $A(2)$  と  $A_\infty^+(3)$  の差は大きい．今回の結果では、 $A$  を用いてもアトラクタ  $\Lambda$  の計算時間をあまり短縮できなかったが、これは、軌道の長時間の追跡からあらかじめ  $\Lambda$  の位置がほぼ求められ、 $\Lambda$  近傍に  $Q$  をとれたためであると考えられる．吸引領域が小さく、長時間の追跡による  $\Lambda$  の近似が困難な場合には、広大な  $Q$  から  $\Lambda$  を求めるのに  $A$  の計算が有効であると考えられる．

また、微分方程式に関しては、そのポアンカレマップの推移確率の計算に極端に時間を要した．推移確率の高速な計算法は、今後の課題である．

### 5.2 分割の再構成に関して

扱った計算例すべてに対し効果を発揮できた．提案手法は経験的に、カオス的な系 (周期的でない系) で、かつ確率密度  $h$  がその台上で一様でない場合に有効であると分かっている．この条件を満たさない場合には、提案手法では定常分布の推定ができないため、分割の改良を行えない場合がある．そのときは、条件 (C1)

なしで様に空間解像度を減らした場合と同様の結果(再構成後の分割と定常分布)が得られる。ただし、カオス系で確率密度がほぼ一樣な場合には、空間解像度も一樣でよいから、結果自体は適当である。

数学的に厳密な条件付けと、確率密度の新たな推定方法の考案は、今後の課題である。

## 6. む す び

状態空間分割法でアトラクタ  $\Lambda$  を含む領域の分割を求め、分割上の有限マルコフ連鎖の定常分布により力学系の定常分布を近似する手法について考えた。極大な不変集合の定義に従い、広大な状態空間  $Q$  から  $\Lambda$  を効率良く求める方法を提案した。また、 $\Lambda$  を近似した分割から、定常分布確率密度に応じて空間解像度を制御した非一樣な分割を再構成した。再構成後の分割を用いることで、精度の良い定常分布が実用的な計算時間で求められることを、計算例により示した。

本研究では分割の再構成において、空間解像度しか考慮しなかったが、今後はマルコフ連鎖による近似力学系の再構成前後の変化、つまり、推移行列の変化にも着目し、分割の構成法を考えたい。

## 文 献

- [1] M. Dellnitz and A. Hohmann, "A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors," *Numerische Mathematik*, vol.75, pp.293–317, 1997.
- [2] M. Dellnitz and O. Junge, "An adaptive subdivision technique for the approximation of attractors and invariant measures," *Computing and Visualization in Science*, vol.1, pp.63–68, 1998.
- [3] M. Dellnitz and O. Junge, "On the approximation of complicated dynamical behavior," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol.36, no.2, pp.491–515, 1999.
- [4] S.M. Ulam, *A collection of mathematical problems*, Interscience, 1960.
- [5] T.Y. Li, "Finite approximation for the frobenius-perron operator. a solution to ulam's conjecture," *J. Approx. Theory*, vol.17, pp.177–186, 1976.
- [6] M. Blank, "Stochastic properties of deterministic dynamical systems," *Sov. Sci. Rev. C. Math./Phys.*, vol.6, pp.243–271, 1987.
- [7] Y. Kifer, "General random perturbations of hyperbolic and expanding transformations," *J. Analyse Math.*, vol.47, pp.111–150, 1986.
- [8] F.Y. Hunt and W.M. Miller, "On the approximation of invariant measures," *J. Stat. Phys.*, vol.66, pp.535–548, 1992.
- [9] J. Ding, Q. Du, and T.Y. Li, "High order approximation of the frobenius-perron operator," *Appl. Math. Comp.*, vol.53, pp.151–171, 1993.

- [10] O. Junge, "An adaptive subdivision technique for the approximation of attractors and invariant measures: Proof of convergence," *Dynamical Systems*, vol.16, no.3, pp.213–222, 2001.

## 付 録

### 推移確率 $p(S_i, S_j)$ の計算

推移確率  $p(S_i, S_j)$  (5) は次のようにして求めた。まず、 $f^{-1}(S_j) \cap S_i$  の近似を考え、 $S_i$  の方形小領域による分割  $S_i$  を (7), (8), (9) と同様に、 $S_i^i (= S_i^i(S_j))$ ,  $S_i^b$ ,  $S_i^o$  に分類する。次に、方形小領域を多次元区間とみなし、 $f$  の区間演算  $f_I$  を用いて  $p(S, S_j)$  の近似、

$$p'(S, S_j) = \frac{m(f_I(S) \cap S_j)}{m(f_I(S))}, \quad (\text{A.1})$$

を考え、推移確率  $p(S_i, S_j)$  を次のように近似した。

$$p(S_i, S_j) \approx \sum_{S \in S_i^i \cup S_i^b} \frac{m(S)}{m(S_i)} p'(S, S_j). \quad (\text{A.2})$$

ただし、 $S \in S_i^i$  に対しては厳密に  $p(S, S_j) = p'(S, S_j) = 1$  であるため、実際には  $S \in S_i^b$  からの推移確率の計算においてのみ  $p'$  (A.1) による近似が行われている。本研究では、 $p(S, S_j)$  が不確定な部分  $S_i^b = \cup_{S \in S_i^b} S$  の割合が、 $\frac{m(S_i^b)}{m(S_i)} < 0.2$  となる条件で  $f^{-1}(S_j) \cap S_i$  を求め、推移確率を計算した。

(平成 18 年 8 月 11 日受付, 11 月 9 日再受付,  
19 年 1 月 4 日最終原稿受付)



濡木 融

2004 東大・工・航空宇宙卒。2006 同大大学院新領域創成科学研究科複雑理工学専攻修士課程了。現在、同専攻博士課程在学中。



村重 淳 (正員)

1986 東大・工・資源開発卒。1988 同大大学院工学系研究科資源開発工学専攻修士課程了。1991 同大学院工学系研究科船舶海洋工学専攻博士課程了。工博。1991 カリフォルニア工科大学リサーチアソシエイト。1995 運輸省船舶技術研究所入所。1998 東大大学院工学系研究科計数工学専攻助教授。1999 東大大学院新領域創成科学研究科複雑理工学専攻助教授。